

## WYKŁADY PLENARNE

### Zastosowanie procesów losowych do opisu transportu przez błony biologiczne

Andrzej Drzewiński, Instytut Fizyki Uniwersytetu Zielonogórskiego  
[A.Drzewinski@int.pan.wroc.pl](mailto:A.Drzewinski@int.pan.wroc.pl)

Pojęcie translokacji wiąże się z przemieszczaniem cząstek biologicznych o strukturze polimera poprzez pory o nanometrowych rozmiarach [1]. Tego typu procesy można obserwować podczas przechodzenia cząstek DNA bądź RNA [2] poprzez pory komórkowego jądra, transport białek poprzez kanaliki w membranach czy infekcji komórki poprzez wirus. Za sprawą potencjalnych technologicznych zastosowań, jak szybkie sekwencjonowanie DNA, terapia genowa czy dostarczanie leków do wybranych grup komórek, zjawisko translokacji stało się obiektem wielu eksperymentów, symulacji numerycznych oraz teoretycznych rozważań [3].

W niniejszej pracy dla zbadania dynamiki tego zjawiska wykorzystano model sieciowy (jedno i dwuwymiarowy) oparty o dyskretyzację położeń mas, gdzie dozwolone przejścia pomiędzy poszczególnymi konfiguracjami  $\sigma$  zapewniają integralność łańcucha. Dzięki wprowadzeniu dodatkowych powiązań między końcowymi i początkowymi konfiguracjami można było nadać translokacji cech procesu periodycznego. Tym samym ewolucja w czasie mogła być analizowana w ramach formalizmu procesów losowych [4,5], opartego o tzw. Master Equation

$$dP(\sigma,t)/dt = \sum_{\sigma'} H_{\sigma,\sigma'} P(\sigma',t).$$

Opisuje ono ewolucję czasową gęstości prawdopodobieństwa  $P(\sigma,t)$ , gdzie  $\sigma$  oznacza mikroskopową konfigurację układu. Elementy macierzy stochastycznej  $H$  są prawdopodobieństwami przeskoku na jednostkę czasu pomiędzy różnymi konfiguracjami. Jako rozwiązanie otrzymujemy rozkład prawdopodobieństw dla poszczególnych konfiguracji w stanie stacjonarnym, gdy  $t \rightarrow \infty$ .

Aby otrzymać ściśle wyniki dla łańcucha o długości rzędu  $N=10$ , niezbędne było rozwiązanie wielkoskalowych układów równań liniowych wymagających aplikacji zaawansowanych algorytmów numerycznych i obliczeń równoległych. Dłuższe łańcuchy, rzędu  $N=100$  analizowane były z wykorzystaniem metody próbkowania podprzestrzeni konfiguracji w konwencji szeregów czasowych (metoda Monte Carlo).

Dla porównania z danymi eksperymentalnymi zaproponowano metodę obliczania czasu translokacji, prędkości transportu masy w zależności od natężenia pola elektrycznego w porze, jak i od długości łańcucha [5]. Także uwzględniono wpływ sprężystości łańcucha istotnie wpływających na zdolność kumulowania masy.

#### Literatura

- [1] J. J. Kasianowicz, E. Brandin, D. Branton, D. W. Deaner, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **93**, 13770 (1996); A. Meller, L. Nivon, D. Branton, Phys. Rev. Lett. **86**, 3435 (2001); A. J. Storm, J. H. Chen, H. W. Zandbergen, C. Dekker, Phys. Rev. E **71**, 051903 (2005).
- [2] J. Darnell, H. Lodish, and D. Baltimore, Molecular Cell Biology (Scientific American Books, New York, 1995); J. Phys.: Condens. Matter **15**, R1365-1393 (2003).
- [3] J.-L. Viovy, Rev. Mod. Phys. **72**, 813 (2000).
- [4] M. Doi, S. F. Edwards, The Theory of Polymer Dynamics (Clarendon, Oxford, 1986); J.M.J. van Leeuwen, A. Drzewiński, Phys. Rep. **475**, 53 (2009).
- [5] S. Żurek, A. Drzewiński, J.M.J. van Leeuwen, J. Stat. Mech. **5**, 19 (2011)

# Wprowadzenie do mechaniki niecałkowitego rzędu – modelowanie układów złożonych

**Jacek S. Leszczyński**, Katedra Ogrzewnictwa, Wentylacji i Ochrony Atmosfery  
 Politechniki Częstochowskiej  
[jleszczynski@is.pcz.czest.pl](mailto:jleszczynski@is.pcz.czest.pl)

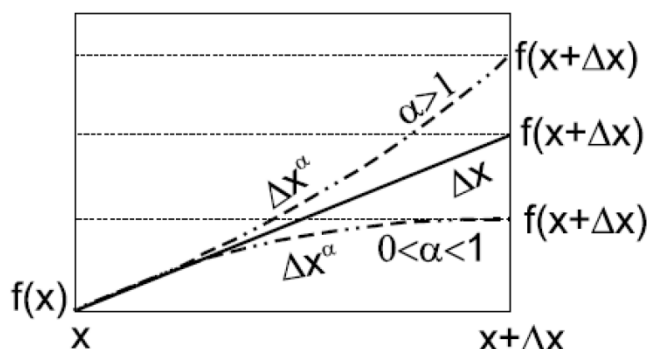
Modelowanie matematyczne procesów złożonych jest ciągłym wyzwaniem dla współczesnych badaczy. W odróżnieniu od układów prostych, gdzie do opisu dynamiki wystarczy znajomość teorii równań różniczkowych, układy złożone cechują się zmiennością struktur w nich występujących, wielkoskalowością oraz nieliniowym charakterem w opisie relacji pomiędzy parametrami.

Pomimo szeregu badań eksperymentalnych i otrzymanych doświadczalnych wyników mechanika układów złożonych nie jest do końca rozpoznana. Powszechnie stosowane prawa nie mają poprawnej ilustracji matematycznej, np. współczynniki charakteryzujące wielkości fizyczne są zależne od skali. Prawa dotychczas sformułowane dla układów złożonych nie są adekwatnie opisane w modelach matematycznych. Stąd pojawienie się w literaturze rachunku operatorów całkowych i różniczkowych niecałkowitego rzędu [1], będących uogólnieniem klasycznego rachunku różniczkowo-całkowego, może stanowić przyczynek do głębszego poznania natury układów złożonych. Obecnie różne grupy badawcze starają się wykorzystać rachunek niecałkowitego rzędu w fizyce, mechanice, biologii, chemii. W odróżnieniu od klasycznego rachunku operatorów całkowego rzędu, które zależą tylko od lokalnego zachowania funkcji, operatory frakcyjne akumulują całą historię tejże funkcji.

Celem wykładu będzie przedstawienie:

- licznych definicji i własności operatorów niecałkowitego rzędu,
- wyników własnych dotyczących rozwijania funkcji w szeregi na półprostej lub na odcinku,
- dyskretyzacji pochodnych niecałkowitego rzędu, zarówno lewo- jak i prawostronnych,
- filozofii modelowania układów złożonych,
- ilustracji matematycznej znanych praw zachowania masy, pędu i energii termicznej dla układów złożonych.

Przykładowo na rysunku 1 pokazano przykład rozwinięcia funkcji w szereg [2].



Rys. 1: Rozwinięcie funkcji w szereg na przedziale  $[x, x+\Delta x]$

Jednym z przykładów zastosowania takiego rozwinięcia będzie ilustracja warunku statycznej równowagi sił masowych i powierzchniowych dla układu złożonego. Wg [2] warunek ten wygląda następująco

$$-\frac{1}{2}(\varepsilon_{ijk})^2 \Delta x_j \Delta x_k \frac{(\Delta x)^{\gamma}}{\Gamma(1+\gamma)} {}^C D_{x_i^+}^{\gamma}(p) + F_i = 0, \quad (1)$$

gdzie  $F_i$  jest składową wektora siły masowej,  $p$  jest ciśnieniem statycznym układu złożonego,  $\Delta x_i$  to wymiar elementu objętości kontrolnej,  $\varepsilon_{ijk}$  jest znanym symbolem Ricciego,  $\Gamma$  to funkcja gamma, natomiast  ${}^C D_{x_i^+}^{\gamma}$  jest pochodną lewostronną niecałkowitego rzędu określoną w sensie Caputo [1], natomiast niecałkowity rząd tego operatora  $\gamma$  jest utożsamiany ze stopniem heterogeniczności układu złożonego.

W odróżnieniu od klasycznego warunku równowagi, gdzie poszczególne wymiary elementu objętości kontrolnej dążą do zera, a tym samym objętość kontrolna dąży do zera, dla warunku równowagi (1) objętość elementu kontrolnego jest różna od zera. Jest to podstawowa cecha modelowania matematycznego układu złożonego, gdzie do jego opisu nie jest wymagana znajomość struktury wewnętrznej, a jedynie określenie nieliniowego zachowania funkcji opisującej proces globalny, zgodnie z rys. 1.

#### Literatura

- [1] Kilbas A., Srivastava H., Trujillo J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies 204, Elsevier, 2006
- [2] Leszczyński J.S., *An introduction to fractional mechanics*, Monograph no. 198, Publ. Office of Czestochowa University of Technology, Czestochowa 2011

## Modelowanie przepływu ciepła w skali mikro

**Ewa Majchrzak**, Katedra Wytrzymałości Materiałów i Metod Komputerowych  
Mechaniki Politechniki Śląskiej  
[Ewa.Majchrzak@polsl.pl](mailto:Ewa.Majchrzak@polsl.pl)

Prawo Fouriera i wynikające z niego powszechnie znane równanie dyfuzji zostało sformułowane przy założeniu, że gradient temperatury i wynikający z niego lokalny strumień ciepła pojawiają się równocześnie (impuls cieplny przenosi się natychmiastowo). Rzeczywiście, przebieg typowych procesów cieplnych zachodzących w skali makro (chłodzenie, nagrzewanie, przemiany fazowe itd.) jest wystarczająco dokładnie opisywalny na gruncie podejścia klasycznego.

Analiza przepływu ciepła w przypadku nowych technologii dotyczących obszarów mikro o wymiarach liczonych w nanometrach i poddawanych oddziaływaniom zewnętrznym o czasie trwania rzędu pikosekund wykazuje, że w takich przypadkach prawo Fouriera nie jest spełnione. Typowym przykładem procesu charakteryzującego się wymienionymi wyżej cechami jest oddziaływanie lasera na jednorodną lub niejednorodną ultracienką warstwę metalową (technologia wytwarzania różnorodnych urządzeń elektronicznych). Podobne zjawiska występują przy wytwarzaniu ogniw fotoelektrycznych, materiałów termoelektrycznych, systemów mikroelektromechanicznych (MEMS).

W referacie zostaną przedstawione różne opisy matematyczne przepływu ciepła w skali nano oraz mikro, między innymi dwu-temperaturowe modele paraboliczne i hiperboliczne określające rozkład temperatury gazu elektronowego i sieci krystalicznej w mikroobszarach metalowych oraz modele z czasami opóźnień. Te ostatnie bazują na zmodyfikowanym prawie Fouriera, do którego wprowadza się odpowiednie parametry „wymuszające” opóźnienie strumienia ciepła w stosunku do gradientu temperatury. W modelu prowadzącym do równania Cattaneo jest to tzw. czas relaksacji  $\tau_q$ , który można interpretować jako średni czas osiągnięcia przez elektrony nowego stanu energetycznego. W modelach z podwójnym opóźnieniem (*dual-phase-lag-models*) obok czasu relaksacji wprowadza się czas termalizacji  $\tau_T$  (średni czas osiągnięcia stanu równowagi w układzie elektrony-sieć krystaliczna). Końcowa postać równań energii dla modeli nieklasycznych jest, w porównaniu z równaniem dyfuzji, dużo bardziej skomplikowana.

Efektywne rozwiązania bardziej złożonych zadań brzegowo-początkowych przepływu ciepła w mikro-obszarach można uzyskać tylko metodami numerycznymi. W końcowej części referatu zostaną pokazane przykłady obliczeń, w których głównie stosowano metodę różnic skończonych.

# **Analiza numeryczna przepływu ciepła w tkance poddanej działaniu zewnętrznego źródła ciepła**

**Bohdan Mochnacki**, Instytut Matematyki Politechniki Częstochowskiej  
[bohdan.mochnacki@im.pcz.pl](mailto:bohdan.mochnacki@im.pcz.pl)

W pracy rozpatruje się niejednorodny obszar tkanki skórnej (naskórek, skóra właściwa, tkanka podskórna), na który oddziałuje zewnętrzne źródło ciepła o rozkładzie parabolicznym lub gaussowskim (zadanie osiowo-symetryczne). Nieustalone pole temperatury w tkance opisuje układ równań parabolicznych z dodatkowymi składnikami determinującymi perfuzję krwi oraz procesy metaboliczne (tzw. równanie Pennesa). Na granicach między podobszarami zadane są warunki idealnego kontaktu. Na części powierzchni naskórka warunek brzegowy (warunek Neumanna) wynika z zadanej postaci funkcji opisującej strumień ciepła dopływający do obszaru tkanki, na pozostałych powierzchniach umownie „wyciętego” z tkanki obszaru walcowego zadano warunki adiabatyczne. Celem badań było określenie dopuszczalnej dawki termicznej nie powodującej destrukcji tkanki na skutek oparzeń. Decyduje o tym przekroczenie na powierzchni między naskórkiem a skórą właściwą pewnej temperatury granicznej. Zadanie rozwiązano metodami numerycznymi, a otrzymane wyniki pozwoliły na wszechstronną analizę procesów cieplnych w układzie tkanka-źródło. Będą one przedstawione w końcowej części wykładu.

## **WARSZTATY**

### **Gry dydaktyczne w nauczaniu matematyki**

**Grażyna Rygał**, Instytut Matematyki i Informatyki  
[g.rygal@ajd.czest.pl](mailto:g.rygal@ajd.czest.pl)

Podczas zajęć zaprezentowane będą gry dydaktyczne rozwijające wyobraźnię przestrzenną, logiczne myślenie, zasadę optymalizacji, spostrzegawczość. Wśród zaproponowanych gier będą między innymi:

1. Bio – klocki Niki
2. Wieża z Hanoi
3. Super Farmer

Ad1. Gra składa się z 8- prostopadłościennych klocków drewnianych, znając trzy płaskie rzuty bryły: z góry, z przodu i z boku należy zbudować bryłę.

Ad2. Należy osiem krążków o zmniejszającej się średnicy przełożyć z jednej pałeczki na drugą przestrzegając odpowiednich zasad. Ważne jest aby wykonać to minimalną ilością ruchów.

Ad3. Super Farmer to gra wymyślona przez polskiego matematyka Karola Borsuka, polega na odpowiedniej hodowli zwierząt i wymaga stosowania strategii.

## **KOMUNIKATY**

### **Algorytmy kryptograficzne podziału sekretu**

**Anna Barczyk**, Instytut Matematyki  
[anna.barczyk@im.pcz.pl](mailto:anna.barczyk@im.pcz.pl)

Referat poświęcony jest jednemu z podstawowych problemów kryptograficznych, znanemu jako algorytm podziału sekretu lub dzielenia tajemnicy. W pracy przedstawiono przegląd i usystematyzowanie różnych modyfikacji algorytmu podziału sekretu, podane zostały przykłady działania wybranych algorytmów. W referacie dokonano również porównania niektórych protokołów podziału sekretu, ich złożoności i skuteczności.

## Jakobiany niższego stopnia

Grzegorz Biernat, Instytut Matematyki

[grzegorz.biernat@im.pcz.pl](mailto:grzegorz.biernat@im.pcz.pl)

W prezentowanej pracy rozważam odwzorowania wielomianowe dwóch zmiennych zespolonych o jacobianach stopnia niższego od maksymalnego (a więc takiego odwzorowania, dla którego stopień jacobianu jest mniejszy od sumy stopni współrzędnych tego odwzorowania pomniejszonej o 2). Podaję pewne oszacowanie między liczbą zer tego odwzorowania i liczbą zer odwzorowania, w którym druga współrzędna jest zastąpiona przez jacobian tego odwzorowania, a pierwsza pozostaje bez zmian. W tej nierówności występuje liczba gałęzi w nieskończoności wyróżnionej pierwszej współrzędnej odwzorowania i jej rodzaj (genus). Prezentowana praca leży w kręgu zagadnień dotyczących hipotezy jacobianowej.

## Zastosowanie zasady kontrakcji do rozwiązania pewnego nieliniowego równania różniczkowego niecałkowitego rzędu

Marek Błasik, Małgorzata Klimek, Instytut Matematyki

[marek.blasik@im.pcz.pl](mailto:marek.blasik@im.pcz.pl) , [mpklimek@o2.pl](mailto:mpklimek@o2.pl)

W referacie przedstawimy metodę rozwiązywania sekwencyjnego równania różniczkowego niecałkowitego rzędu postaci:

$$(D^{\alpha_2} - a_1 D^{\alpha_1})f(t) = \psi(t, f(t)), \quad (1)$$

w którym pochodne są zadane jak następuje

$$D^{\alpha_1} f(t) := {}^c D_{0+}^{\alpha_1} f(t) \quad (2)$$

$$D^{\alpha_2} f(t) := {}^c D_{0+}^{\alpha_1} {}^c D_{0+}^{\alpha_2 - \alpha_1} f(t), \quad \alpha_2 > \alpha_1 \quad (3)$$

Wprowadzimy jednoparametrową rodzinę norm na przestrzeni funkcji ciągłych w skończonym przedziale  $[0, b]$ , oraz wykażemy ich równoważność z normą supremum. Otrzymamy w ten sposób przestrzeń metryczną zupełną, z metryką generowaną przez nową normę. Równanie (1) przekształcimy do warunku na punkt stały pewnego odwzorowania na przestrzeni funkcji ciągłych. Wykorzystamy twierdzenie *Banacha* o punkcie stałym oraz uogólnimy technikę norm równoważnych *Bieleckiego* [2] w celu wykazania istnienia i jednoznaczności rozwiązania równania (1). Szczegółowe wyniki zawarto w pracy [1].

Literatura

- [1] M. Klimek, M. Błasik (2011) *On application of the contraction principle to solve two-terms fractional differential equations*. Acta Mechanica et Automatica, w druku.
- [2] A. Bielecki (1956) *Une remarque sur la methode de Banach-Cacciopoli-Tikhonov dans la theorie des equations differentielles ordinaires*. Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III, Vol. IV, 261-264.

## Rozwiązania przybliżone równań zawierających złożenie lewo- i prawostronnych pochodnych Caputo

Tomasz Błaszczuk, Instytut Matematyki

[tombłaszczuk@gmail.com](mailto:tombłaszczuk@gmail.com)

W pracy rozważa się zwyczajne równania różniczkowe zawierające złożenie lewo- i prawostronnych pochodnych niecałkowitego rzędu. Obecność operatora, będącego złożeniem dwóch typów pochodnych powoduje trudności w poszukiwaniu rozwiązań analitycznych tych równań. Wyniki uzyskane dotychczas w oparciu o twierdzenie o punkcie stałym, dotyczą tylko pewnych szczególnych przypadków. Dodatkowo rozwiązania te mają postać dość skomplikowanych szeregów funkcji specjalnych lub szeregów całek rzędu ułamkowego. Dlatego istotnym zagadnieniem staje się opracowanie metod numerycznych



rozwiązań rozpatrywanych równań. W pracy proponuje się schematy numeryczne w oparciu o metodę różnic skończonych.

## **Wykorzystanie pakietu MAPLE do rozwiązywania zagadnień inżynierskich – możliwości i ograniczenia**

**Jolanta Borowska**, Instytut Matematyki

[jolaborowska@o2.pl](mailto:jolaborowska@o2.pl)

Maple jest jednym z pakietów matematycznych wspomagających prace naukowe w zakresie nauk ścisłych. W programie wykorzystuje się rachunek symboliczny, obliczenia numeryczne i liczne procedury graficzne umożliwiające wizualizację danych i wyników obliczeń. Program uwalnia użytkownika od ręcznego dokonywania wielu długich i żmudnych przekształceń oraz obliczeń przez co umożliwia badaczom naukowym szybkie rozwiązywanie złożonych zadań jak też stanowi pomoc dydaktyczną w nauczaniu studentów kierunków ścisłych. W referacie zostaną zaprezentowane przykłady świadczące o tym, że efektywne posługiwanie się programami do obliczeń symbolicznych nie zwalnia użytkownika od posiadania odpowiedniej wiedzy matematycznej w zakresie rozwiązywanych problemów.

## **Zastosowanie metody elementów skończonych do rozwiązywania równań anomalnej dyfuzji**

**Mariusz Ciesielski**, Instytut Informatyki Teoretycznej i Stosowanej

[mariusz.ciesielski@gmail.com](mailto:mariusz.ciesielski@gmail.com)

Anomalna dyfuzja jest zjawiskiem występującym w przyrodzie najczęściej w złożonych systemach. Zjawisko to można modelować za pomocą równań różniczkowych cząstkowych zawierających operatory niecałkowitego rzędu uwzględniające efekt pamięci rozważanego systemu (w referacie rozpatrywany będzie tylko operator Caputo). Równocześnie pojawia się problem związany z poszukiwaniem rozwiązań tych równań – znane są rozwiązania analityczne tylko niektórych typów równań. Pomocne w tym celu mogą być rozwiązania przybliżone. W referacie zostanie przedstawiony algorytm numeryczny oparty na metodzie elementów skończonych dla zadania jednowymiarowego opisującego proces anomalnej dyfuzji uwzględniający warunki brzegowo-początkowe, które mają sens fizyczny, tzn. zdefiniowanych jak dla klasycznego równania dyfuzji – I, II i III rodzaju. Równania anomalnej dyfuzji są uogólnieniem klasycznego równania dyfuzji, które mogą również opisywać procesy relaksacyjne oraz procesy pośrednie między dyfuzją a propagacją fali (tzw. procesy o charakterze relaksacyjno-oscylacyjnym). Szczególnym przypadkiem anomalnej dyfuzji jest również uogólnione równanie Cattaneo-Vernotte'a, które może opisywać niefourierowski przepływ ciepła. Przedstawione zostaną przykładowe wyniki rozwiązań numerycznych.

## **Transfer obciążeń a struktura lawin krytycznych**

**Tomasz Derda**, Instytut Matematyki

[tomasz.derda@im.pcz.pl](mailto:tomasz.derda@im.pcz.pl)

Ewoluuje zniszczenie, takie jak pęknięcie czy rozrywanie, jest nieodwracalnym procesem powodującym destrukcję komponentów systemu. Formowanie się pęknięć jest inicjowane przez lokalne mikropęknięcia, które rozrastają się kiedy lokalne naprężenie przekracza odpowiedni próg wytrzymałości materiału. Przy pewnej koncentracji, mikropęknięcia zaczynają działać spójnie zwielfokrotniając lokalne naprężenie i w konsekwencji wywołując falę zniszczeń.

Znajomość przebiegu zniszczenia aż do całkowitego zniszczenia i jego efektywny opis są istotne dla analizy mechanicznego zachowania systemu w odpowiedzi na zastosowane obciążenia. Z teoretycznego punktu widzenia zrozumienie złożoności procesu zniszczenia pogłębia się dzięki analizie odpowiednich modeli sieciowych. Przykładem

o dużym znaczeniu jest rodzina modeli transferu obciążenia, a szczególnie model włókien (ang. *Fibre Bundle Model*). W modelu włókien zbiór elementów jest umieszczony w węzłach sieci oraz losowane są, z zadaniem rozkładem prawdopodobieństwa, progi wytrzymałości dla poszczególnych elementów. Po zniszczeniu elementu jego obciążenie jest transferowane do innych niezniszczonych elementów. Rozważane są trzy reguły transferu obciążenia: globalny podział obciążenia (ang. *global load sharing – GLS*) – obciążenie jest równo dzielone na pozostałe elementy, lokalny podział obciążenia (ang. *local load sharing – LLS*) – obciążenie jest redystrybuowane do sąsiadujących elementów oraz podział obciążenia z zastosowaniem obszarów Voronoi – obciążenie jest równo transferowane wśród elementów leżących wewnątrz obszarów Voronoi utworzonych przez grupę elementów zniszczonych w kolejnych jednostkach czasu.

W pracy przedstawione będą charakterystyki statystyczne wielkości lawin zniszczeń sub-krytycznych oraz krytycznych.

## **Ciepła sieciowe nośników energii**

**Zbigniew Domański**, Instytut Matematyki  
[zdomansk@gmail.com](mailto:zdomansk@gmail.com)

Transport energii w formie ciepła za pośrednictwem elektronów oraz różnych kwazicząstek jest jednym z najintensywniej badanych zagadnień w ramach inżynierii mechanicznej. Przez długi okres ze względu na aplikacje uwzględniano tylko transport odpowiadający temperaturom otoczenia lub wyższym. Naturalne więc jest, że inżynieria mechaniczna nie dotykała problemów zmienności ciepła sieciowych przy zmianie temperatury materiału. Jednak w obrębie prac dotyczących inżynierii materiałowej są już znane ciekawe prace, w których uwzględnia się w równaniach transportu ciepła rolę elektronów z wyraźnym uwzględnieniem kwantowej natury transportu niskotemperaturowego. Z punktu widzenia fizyki mikroskopowe mechanizmy transportu energii w formie ciepła uwzględniały oddziaływania między nośnikami ładunku elektrycznego, kwazicząstkami oraz siecią jeśli transport dotyczył środowiska metali o strukturze krystalicznej. Jednak najciekawsze są wyniki eksperymentów i analiz transportu ciepła w układach mezoskopowych w niskich temperaturach ponieważ okazuje się, że przepływ ciepła w takich układach jest kwantowany. Oznacza to, że istnieje minimalna porcja przekazywanego "ciepła" podobnie jak istnieje minimalna wartość przekazywanej energii.

Referat zawiera krótkie wprowadzenie do tematyki kwantowego przepływu ciepła.

## **3D simulation of alloys solidification in the NuscaS system**

**Robert Dyja, Juliusz Mikoda**, Instytut Informatyki Teoretycznej i Stosowanej  
[robert.dyja@icis.pcz.pl](mailto:robert.dyja@icis.pcz.pl) , [juliusz.mikoda@icis.pcz.pl](mailto:juliusz.mikoda@icis.pcz.pl)

The authors present the capabilities of the authorial simulation system for particular stages of solidification. This system uses the finite element method. It enables to perform simulations of phenomena described by the partial differential equations. Currently the NuscaS system consists of: library of finite elements, finite elements mesh generator, modules for performing simulations of: heat transfer and solidification. The module of solidification enables to conduct simulations: equilibrium solidification of two-component alloys for three-dimensional problems. This paper presents results of exemplar simulations that illustrate capabilities of the described tool. This results consist of: cooling curves, charts of solid phase distribution, fields of temperature in cast and casting mould. The paper concludes with remarks and discussion of obtained results.

## O pewnych problemach stopowania ciągu sum nieujemnych zmiennych losowych

Andrzej Grzybowski, Instytut Matematyki  
[azgrzybowski@gmail.com](mailto:azgrzybowski@gmail.com)

Referat jest poświęcony problemom optymalnego stopowania. Polegają one na wyborze momentu podjęcia określonego typu akcji, której skutki zależą od przebiegu sekwencyjnie obserwowanego procesu losowego. W latach pięćdziesiątych ubiegłego stulecia problematyka optymalnego stopowania wyodrębniła się z analizy sekwencyjnej w osobny dział normatywnej teorii decyzji. Obecnie modele rozważane na gruncie tej teorii znajdują szerokie zastosowania w rozwiązywaniu rozmaitych problemów pojawiających się na gruncie badań operacyjnych, ekonomii czy w analizie decyzji finansowych.

W referacie szczegółowo zostanie omówiona nowa klasa tych zadań określana jako problemy typu *blackjack*. Problemy te formalnie można scharakteryzować następująco: Dany jest ciąg  $X_1, X_2, \dots, X_N$  nieujemnych zmiennych losowych. Decydent obserwuje je kolejno, za każdym razem decydując czy skończyć obserwację, czy też je kontynuować. Jeżeli zdecyduje się zakończyć obserwację w chwili  $k$ , to otrzymuje wypłatę równą  $W(\sum_{i=1}^k X_i)$ .

Zakładamy, że funkcja  $W: R_+ \rightarrow R_+$  osiąga swe jedyne maksimum w punkcie  $T > 0$ , zaś dla argumentów mniejszych od  $T$  jest niemalejąca i dla argumentów większych od  $T$  jest nierosnąca. Rozwiązanie takiego problemu polega na wskazaniu reguły decyzyjnej, tzw. reguły stopu, która zmaksymalizuje oczekiwaną wypłatę dla decydenta. Przedstawimy pewne elementarne warunki, przy których tak postawiony problem ma jawne i proste rozwiązanie, omówimy problemy związane z badaniem miar ryzyka związanego z optymalnymi regułami stopu oraz wskażemy interesujące problemy, które jeszcze czekają na rozstrzygnięcie.

## Erlang Service System with Non-Homogeneous Demands

Magdalena Kawecka, Instytut Matematyki  
[magdalena.kawecka@im.pcz.pl](mailto:magdalena.kawecka@im.pcz.pl)

We discuss a  $M/G/n/0$ -type service systems with demands having some random capacity (volume)  $\zeta$ . We assume that the total capacity of demands present in the system at arbitrary time moment  $t$  is limited by the value (system capacity)  $V$ . For the case of service time independent of the demand volume, we calculate demands number stationary distribution and loss probability.

## Equivalent norm/metric method for fractional differential equations with Riemann-Liouville, Caputo or Hadamard derivative

Małgorzata Klimek, Instytut Matematyki  
[mpklimek@o2.pl](mailto:mpklimek@o2.pl)

Fractional differential equations (FDE) emerged in applied mathematics as an important tool to describe many processes and phenomena in physics, mechanics, economics, control theory, engineering and bioengineering. During the last decades, the theory of fractional differential equations has become an interesting and meaningful field of mathematics (the results and references are summarized in monographs (Diethelm 2010; Kilbas et al 2006; Kilbas and Trujillo 2001, 2002; Klimek 2009; Lakshmikantham et al 2009). Since 2010 the FDE theory also was classified in the MSC system: under 34A08 for ordinary fractional differential equations, 34K37 for functional fractional differential equations and under 35R11 for partial fractional differential equations.

We shall present here existence-uniqueness results for sequential fractional differential equations in the form of



$$(D^\alpha)^m f(t) = \sum_{k=1}^m a_k (D^\alpha)^k f(t) + \psi(t, f(t)),$$

where the basic differential operator is respectively Riemann-Liouville, Caputo or Hadamard left-sided derivative. Assuming that the nonlinear term obeys the Lipschitz condition and using the corresponding equivalent norm/metric on function space, we obtain a general solution of the above equation generated by the stationary function of the highest order derivative.

Literatura

- [1] **Diethelm K.** (2010), The Analysis of Fractional Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin
- [2] **Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.** (2006), Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, Amsterdam
- [3] **Kilbas A.A., Trujillo J.J.** (2001), Differential equation of fractional order: methods, results and problems. I, Appl. Anal. Vol. 78, 153-192
- [4] **Kilbas A.A., Trujillo J.J.** (2002), Differential equation of fractional order: methods, results and problems. II, Appl. Anal. Vol. 81, 435-493
- [5] **Klimek M.** (2009), On Solutions of Linear Fractional Differential Equations of a Variational Type, The Publishing Office of the Czestochowa University of Technology, Czestochowa
- [6] **Lakshmikantham V., Leela, S., Vasundhara Devi J.** (2009), Theory of Fractional Dynamic Systems, Cambridge Scientific Publishers, Cambridge.

## O zgodności pewnych relacji styczności zbiorów

**Tadeusz Konik**, Instytut Matematyki

[tadeusz.konik@im.pcz.pl](mailto:tadeusz.konik@im.pcz.pl)

W pracy tej rozważane są pewne problemy związane ze zgodnością relacji styczności zbiorów w uogólnionych przestrzeniach metrycznych  $(E, l)$ .

Uogólnioną przestrzenią metryczną nazywamy parę  $(E, l)$ , gdzie  $E$  jest dowolnym niepustym zbiorem, natomiast  $l$  nieujemną funkcją rzeczywistą określoną na iloczynie kartezjańskim  $E_0 \times E_0$  wszystkich niepustych podzbiorów  $E_0$  zbioru  $E$ .

Problemy zgodności relacji styczności dotyczą relacji styczności zbiorów określonej przez W. Waliszewskiego:

$$(1) \quad T_l(a, b, k, p) := \{ (A, B) : A, B \in E_0, \text{ para zbiorów } (A, B) \text{ jest } (a, b) \text{-skupiona} \}$$

w punkcie  $p$  przestrzeni  $(E, l)$  oraz

$$\frac{1}{r^k} l(A \cap S_l(p, r)_{a(r)}, B \cap S_l(p, r)_{b(r)}) \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} 0 \}.$$

Jeśli  $(A, B) \in T_l(a, b, k, p)$ , to mówimy, że zbiór  $A \in E_0$  jest  $(a, b)$ -styczny rzędu  $k$  do zbioru  $B \in E_0$  w punkcie  $p$  przestrzeni  $(E, l)$ .

Dwie relacje styczności  $T_{l_1}(a_1, b_1, k, p)$  i  $T_{l_2}(a_2, b_2, k, p)$  nazywamy zgodnymi w zbiorze  $E$ , jeśli

$$(2) \quad (A, B) \in T_{l_1}(a_1, b_1, k, p) \Leftrightarrow (A, B) \in T_{l_2}(a_2, b_2, k, p) \text{ dla } A, B \in E_0.$$

W pracy zostaną podane pewne twierdzenia będące warunkami wystarczającymi dla zgodności relacji styczności  $T_{l_1}(a_1, b_1, k, p)$  i  $T_{l_2}(a_2, b_2, k, p)$  w uogólnionych przestrzeniach metrycznych.

## Processor Sharing System with Random Volume Demands

Łukasz Kotyla, Oleg Tikhonenko, Instytut Matematyki  
[lukasz.kotyla@im.pcz.pl](mailto:lukasz.kotyla@im.pcz.pl) , [oleg.tikhonenko@im.pcz.pl](mailto:oleg.tikhonenko@im.pcz.pl)

We discuss a Processor sharing  $M/G/1$ -type system with demands having some random capacity (volume)  $\zeta$ . We assume that the total capacity of demands present in the system at arbitrary time moment  $t$  is limited by the value (system capacity)  $V$ . For the case of demand length independent of the it's volume, we calculate demands number stationary distribution and loss probability.

## Zastosowanie metody funkcji Greena w analizie drgań płyt eliptycznych

Stanisław Kukła, Instytut Matematyki  
[stanislaw.kukla@im.pcz.pl](mailto:stanislaw.kukla@im.pcz.pl)

W pracy przedstawiono rozwiązanie zagadnienia drgań własnych płyty eliptycznej z podporami sprężystymi. Częstości drgań i funkcje własne otrzymano stosując metodę funkcji Greena. Występujące w rozwiązaniu zagadnienia funkcje Greena operatora biharmonicznego wyznaczono wykorzystując funkcje Greena operatora Helmholtza w obszarze eliptycznym. Wprowadzając współrzędne eliptyczne otrzymano zagadnienia brzegowe, których rozwiązania wyrażone przez funkcje Mathieu i zmodyfikowane funkcje Mathieu, zostały wykorzystane do skonstruowania funkcji Greena w układzie eliptycznym. Wyprowadzone równanie częstości drgań własnych płyty eliptycznej z podporami sprężystymi rozwiązywane jest numerycznie. Przedstawiono przykłady badań numerycznych, których celem było określenie wpływu parametrów charakteryzujących układ na jego drgania swobodne.

## Stany naprężenia w częściach obrabianych cieplnie strumieniem powietrza

Adam Kulawik, Instytut Informatyki Teoretycznej i Stosowanej  
[adam.kulawik@icis.pcz.pl](mailto:adam.kulawik@icis.pcz.pl)

W procesie wytwarzania części stalowych istotną rolę odgrywa ich obróbka termiczna. Obrabianie termiczne części maszyn często odbywa się na transporterach taśmowych, gdzie części przechodzą kolejno przez kanały nagrzewające oraz chłodzące. W celu zwiększenia intensywności nagrzewania lub chłodzenia wykorzystuje się wymuszony ruch powietrza lub cieczy. Opisany proces produkcyjny jest stosowany do wykonywania elementów wieloseryjnych, gdzie błąd technologiczny na etapie projektowania jest bardzo kosztowny. W procesie hartowania elementów stalowych duże zmiany temperatury doprowadzają do powstawania znaczących naprężeń, które mogą doprowadzić do zniszczenia części podczas produkcji lub podczas ich eksploatacji. W celu eliminacji wad, przed wdrożeniem technologii produkcji, wykorzystuje się modelowanie numeryczne.

W pracy przedstawiono model numeryczny procesu hartowania elementów stalowych nagrzewanych oraz chłodzonych strumieniem ciepła. Prezentowany model numeryczny hartowania jest zbudowany z modułów obliczeniowych dotyczących zjawisk przewodzenia ciepła, przemian fazowych, zjawisk mechanicznych oraz zjawisk ruchów chłodziwa.

Do modelowania pól temperatury zastosowano model numeryczny rozwiązujący równanie przewodzenia ciepła z członem konwekcyjnym. Wykorzystano uogólnioną metodę różnic skończonych ze stabilizacją ze względu na prędkość. Kinetykę przemian fazowych w stanie stałym określano na podstawie makroskopowego modelu z wykorzystaniem wykresów CTP i empirycznych równań Avramiego oraz Koistinena-Marburgera. Model zjawisk mechanicznych zbudowano z wykorzystaniem metody elementów skończonych. Do modelowania zmiennych warunków chłodzenia wykorzystano rozwiązanie numeryczne

równań Naviera-Stokesa, równanie ciągłości oraz równanie Poissona. Zbudowane modele numeryczne zweryfikowano za pomocą testów numerycznych, analitycznych oraz badań eksperymentalnych.

## **Pseudogrupy przekształceń jako uogólnione półgrupy inwersyjne**

**Jolanta Lipińska**, Instytut Matematyki

[jolanta.lipiska3@neostrada.pl](mailto:jolanta.lipiska3@neostrada.pl)

Jest to kontynuacja referatu wygłoszonego na poprzedniej konferencji, a zatytułowanego „Pseudogroups of transformations on antidiscrete topological spaces”. Ponieważ tylko pseudogrupy przekształceń na przestrzeniach topologicznych antydyskretnych będą grupami (w sensie algebraicznym, biorąc składanie przekształceń jako działanie), pojawia się pytanie, czym będą dowolne pseudogrupy przekształceń, zarówno w sensie definicji Ehresmanna, jak i Schoutena-Haantjesa. Odpowiedź jest następująca: algebraicznie będą to uogólnione półgrupy inwersyjne. W referacie omówię pseudogrupy w sensie obu definicji i pokażę, jakie konsekwencje algebraiczne wynikają z tak przyjętych definicji.

## **Symetria odbiciowa w analizie niecałkowitego rzędu – przykład równania ruchu**

**Maria Lupa**, Instytut Matematyki

[maria.lupa@im.pcz.pl](mailto:maria.lupa@im.pcz.pl)

Rozważymy symetrię odbiciową w przedziale ograniczonym i związane z nią własności operatorów niecałkowitego rzędu. Zdefiniujemy pochodną symetryczną i antysymetryczną. Operator odbicia wyznacza także część symetryczną i antysymetryczną funkcji. Następnie dla składowych funkcji wykażemy twierdzenie o reprezentacji dla rzędu w zakresie  $(1,2)$  – pozwalające przedstawić pochodne zadane w przedziale  $[0,b]$  poprzez pochodne zlokalizowane w przedziale  $[0,b/2]$ . Stosując własności symetrii odbiciowej pochodnych NR można otrzymać nowe równania ruchu w mechanice frakcyjnej. Wyprowadzimy je dla prostego modelu i omówimy lokalizację równań Eulera-Lagrange'a w tym szczególnym przypadku.

## **Nie zrównoważony model produkcyjno - konsumpcyjny**

**Marek Ładyga, Maciej Tkacz**, Instytut Matematyki

[marek.ladyga@im.pcz.pl](mailto:marek.ladyga@im.pcz.pl) , [maciej.tkacz@im.pcz.pl](mailto:maciej.tkacz@im.pcz.pl)

W pracy przedstawiono iteracyjną metodę doprowadzenia do zrównoważenia modelu produkcyjno-konsumpcyjnego. W modelu tym zakłada się, że łączny popyt przewyższa łączną podaż w ustalonym okresie czasu. Zaproponowana metoda polega na tym, iż w każdym kroku iteracyjnym każdy kontrahent faktycznie ustępuje. Ustępstwo to nie przekracza granicy ich możliwości produkcyjnych lub konsumpcyjnych. W każdym następnym kroku iteracyjnym wielkość, jaka pozostała do zrównoważenia modelu jest mniejsza od poprzedniej. Do zrównoważenia modelu dochodzi w skończonej liczbie kroków. Liczba ta nie przekracza ilości kontrahentów.

## **Perkolacja na siatkach skończonych w obecności przeszkód**

**Karol Pasternak**, Instytut Matematyki

[karol.pasternak@im.pcz.pl](mailto:karol.pasternak@im.pcz.pl)

Termin perkolacja oznacza przepływ lub przeciekanie. Początkowo dotyczył przepływu płynu przez sieć częściowo (losowo) zablokowanych kanałów. Obecnie teoria perkolacji może być stosowana do opisu wielu zjawisk fizycznych jak np. przepływ cieczy

w ośrodku porowatym, rozprzestrzenianie się chorób w określonej populacji, sieć elektryczna. Z omawianym zjawiskiem ściśle związane są przedstawione w prezentacji pojęcia prawdopodobieństwa wystąpienia perkolacji ( $P_p$ ), klastra, proggu perkolacji ( $p_c$ ) oraz wykładnika krytycznego ( $\beta$ ).

Badane układy zadane są na kwadratowych siatkach o określonych rozmiarach  $L \times L$ . Podczas prezentacji omówimy wpływ pojawienia się przeszkód na proces perkolacji w układzie o skończonym rozmiarze. Porównamy zjawisko perkolacji w układach bez przeszkód z układami z przeszkodami symetrycznymi. Przeprowadzone symulacje komputerowe są kontynuacją badań przedstawionych w pracy [1].

#### Literatura

[1] Drzewiński A., Klimek M., Kośmider M., Pasternak K., Szota K. „Percolation with a barrier in finite systems”, Scientific Research of the Institute of Mathematics and Computer Science, 2010, 2(9), 37.

## Modele II generacji w procesie krzepnięcia czystych metali

Edyta Pawlak, Sylwia Lara – Dziembek, Instytut Matematyki

[eappawlak@gmail.com](mailto:eappawlak@gmail.com) , [sylwia.lara@im.pcz.pl](mailto:sylwia.lara@im.pcz.pl)

W pracy omówiono problemy związane z modelowaniem krzepnięcia czystych metali (modele makro/mikro). W równaniu różniczkowym Fouriera-Kirchhoffa (opis makroskopowy) wydajność składnika źródłowego determinującego przebieg procesu krzepnięcia wynika z analizy procesu na poziomie mikro. Przedstawiono znane z literatury opisy matematyczne procesu nazywane modelem liniowym i modelem wykładniczym. Pokazano, że ich uogólnieniem jest zaproponowany przez Mochnackiego i in. model potęgowy. Na etapie obliczeń w skali mikro wykorzystano prawa zarodkowania i wzrostu. Analizowane zadanie brzegowo-początkowe rozwiązano wykorzystując metodę różnic skończonych. W końcowej części pracy pokazano przykłady wyników symulacji numerycznych.

## Mathematical model of local instability of sandwich panel in bending

Zbigniew Pozorski, Instytut Konstrukcji Budowlanych Politechniki Poznańskiej

[zbigniew.pozorski@ikb.poznan.pl](mailto:zbigniew.pozorski@ikb.poznan.pl)

Local instability of compressed face is one of basic mechanisms of sandwich panel failure. The phenomenon appears particularly in case of thermally loaded multi-span structures. The most preferably method of wrinkling stress determination is expensive experimental method until now.

The aim of the paper is creation of the mathematical model through analysis of experimental results. This model may be particularly useful in evaluation of structure response subjected to, difficult to realize experimentally, thermal actions.

The first stage of the study was execution of numerous laboratory tests of bending of sandwich panels. For panels with various span and depth, the influence of loading and supporting of the system on the admissible stress in compressed face was analyzed.

In the second stage mathematical models of wrinkling phenomenon were studied. Among others conceptions, the usefulness of the model described by the differential equation

$$B_F \cdot w^{IV}(x) + P \cdot w''(x) + k \cdot w(x) = q(x) \quad (1)$$

was discussed. The symbols  $B_{F1}$ ,  $w$ ,  $k$ ,  $w_0$  and  $q$  denote bending stiffness of the face, displacement perpendicular to the face, foundation stiffness, initial displacement and transverse loading, respectively. The essential role in the model plays stiffness of the foundation  $k$ . This stiffness  $k$  depends on physical and geometrical parameters of the soft core of sandwich panel.

During the model calibration came out many difficulties. The model is very sensitive to boundary conditions. Its worth to underline that class of boundary conditions must correspond to class of the model of sandwich structure. Additionally it was proved that geometrical imperfections, which have place in real structures, dramatically change wrinkling stress capability.

The examined mathematical model turned out to be useful in the description of the local instability of sandwich panel in bending. The applicability of the model is conditioned by the proper determination of the model parameters and boundary conditions.

## **Zastosowanie pewnej metody minimalizacji niewypukłych funkcjonałów do analizy jednowymiarowego zagadnienia typu Dirichleta**

**Piotr Puchała**, Instytut Matematyki

[piotr.puchala@im.pcz.pl](mailto:piotr.puchala@im.pcz.pl)

Przedstawiamy próbę analizy minimalizacji funkcjonału całkowego typu Dirichleta w przypadku jednowymiarowym. Funkcja podcałkowa jest zdefiniowana jako minimum funkcji kwadratowych, jest więc niewypukła. Niewypukłość funkcji podcałkowej nie pozwala na zastosowanie klasycznych twierdzeń przy badaniu infimum. Zazwyczaj w takich przypadkach dokonuje się relaksacji funkcjonału: minimalizuje się jego uwypuklenie. Część informacji jest jednak tracona w wyniku uwypuklenia. Referat przedstawia próbę zastosowania w jednowymiarowym przypadku metody zaproponowanej przez prof. Z. Naniewicza minimalizowania funkcjonałów, których integrandy mają postać minimum funkcji kwaziwypukłych.

## **Wpływ położenia przegubu na dywergencyjną i flutterową utratę stateczności kolumny poddanej obciążeniu uogólnionemu**

**Krzysztof Sokół**, Instytut Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn

[soki1981@wp.pl](mailto:soki1981@wp.pl)

Publikacje naukowe opisujące zagadnienie drgań poprzecznych i stateczności geometrycznie nieliniowych smukłych układów prętowych poddanych obciążeniom niekonserwatywnym pojawiły się już w latach sześćdziesiątych ubiegłego wieku. Rozpatrywano wtedy między innymi wpływ takich parametrów jak współczynnik śledzenia, asymetria sztywności na zginanie oraz sztywność sprężyn podpierających badane kolumny na rodzaj utraty stateczności oraz wartość obciążenia bifurkacyjnego i krytycznego.

W niniejszej pracy przedstawiono zagadnienie drgań własnych kolumny geometrycznie nieliniowej tracącej stateczność poprzez dywergencję lub flutter. Badany układ, którego pręt pierwszy jest prętem ciągłym, a pręty drugi i trzeci połączone są przegubem i sprężyną rotacyjną o sztywności  $C$ , obciążony jest siłą skupioną  $P$ , której kierunek działania zmienia się w zależności od współczynnika śledzenia  $\eta$ . Głównym celem badań jest określenie wpływu położenia przegubu na wartość obciążenia dywergencyjnego i flutterowego oraz na częstość drgań własnych układu. Prezentowane wyniki dotyczą także wpływu sztywności sprężyny rotacyjnej i współczynnika śledzenia  $\eta$  na badane wielkości.

## **Wpływ szybkości chłodzenia/nagrzewania kriosondy na przebieg procesu zamrażania tkanki**

**Jarosław Siedlecki, Wioletta Tuzikiewicz**, Instytut Matematyki

[jaroslawsiedlecki@gmail.com](mailto:jaroslawsiedlecki@gmail.com) , [wioletta-p.128@tlen.pl](mailto:wioletta-p.128@tlen.pl)

Praca dotyczy numerycznego modelowania zabiegów kriochirurgicznych. W szczególności rozpatruje się walcową kriosondę zewnętrzną działającą na powierzchnię tkanki skórnej. Z matematycznego punktu widzenia proces zamrażania tkanki opisany jest



tw. równaniem Pennesa z dodatkowym składnikiem (funkcją źródła) sterującym wydzielaniem się utajonego ciepła zamrażania.

Końcówka kriosondy stygnie od temperatury otoczenia do temperatury minimalnej, a następnie jest podgrzewana na powrót do temperatury otoczenia. Funkcja opisująca Zmienność temperatury końcówki jest linią łamaną, przy czym prędkości chłodzenia i nagrzewania są takie same (różnią się znakiem). W pracy badano wrażliwość nieustalonego pola temperatury na zmiany tych prędkości. Wykorzystano metodę bezpośrednią analizy wrażliwości.

Zadanie podstawowe i zadanie analizy wrażliwości rozwiązano metodami numerycznymi (MRS).

W końcowej części pracy przedstawiono wyniki obliczeń numerycznych.

## Przewodnictwo cieplne w procesie zagęszczania

Magdalena Szecówka, Instytut Matematyki

[magdalena.szecowka@gmail.com](mailto:magdalenaszecowka@gmail.com)

Zarówno w praktyce inżynierskiej jak i badaniach teoretycznych często mamy do czynienia z transportem energii w materiałach o budowie niejednorodnej. Duże znaczenie aplikacyjne mają takie przykładowe zjawiska transportu jak: rozchodzenia się dźwięku, transport ciepła lub ładunku elektrycznego w granulatach. Zjawiska te wykazują wiele zdumiewających właściwości, które wynikają ze skomplikowanych oddziaływań pomiędzy ziarnami, w szczególności są skutkiem wrażliwości granulatu na upakowanie i charakterystykę powierzchni ziaren. Dla materiałów sypkich wartość współczynnika przewodnictwa zależy od chropowatości powierzchni ziaren, rodzaju materiału oraz od ciśnienia zewnętrznego utrzymującego granulaty w określonej objętości.

Liczne analizy transportu ciepła w ośrodkach niejednorodnych, którymi są też granulaty, wykorzystują przybliżenia, w tym bardzo popularne podejście tzw. ośrodka efektywnego (EMA - Effective Medium Approximation). Podejście to umożliwia przybliżone rozwiązania równań opisujących pole temperatur, które z kolei wprowadza szczegółową charakterystykę własności transportowych mikrostruktury. W ramach EMA, transport ciepła przez heterogeniczny ośrodek może być wyrażone analogicznie do opisu stosowanego w przypadku transportu w ośrodku jednorodnym

$$c(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_{eff} \nabla^2 T. \quad (1)$$

z tą różnicą, że współczynnik  $\lambda_{eff}$  jest zmienną losową. Współczynnik ten jest wyliczany jako odpowiednia wielkość charakteryzująca stochastyczną naturę ośrodka niejednorodnego. Najczęściej charakterystyka ta jest estymatorem wartości średniej, przy czym często są szacowane również inne typowe charakterystyki statystyczne takie jak, wariancja lub skośność rozkładu  $\lambda_{eff}$ .

We wzorze (1) występujące wielkości to: Średnia temperatura układu -  $T$ ,  $\lambda_{eff}$  - współczynnik przewodności cieplnej,  $c(T)$  - przepływ ciepła. Równanie (1) przedstawia rodzaj operacyjnego punktu widzenia, gdy system jest traktowany jako czarna skrzynka, której wejścia i wyjścia charakteryzują się różnymi temperaturami i  $\lambda_{eff}$  agreguje wszystkie lokalne informacje o szczegółach próbki.

Przetawione będą wyniki obliczeń współczynnika  $\lambda_{eff}$  w funkcji rozkład niejednorodności materiałowych oraz gęstości ośrodka, która jest miarą przyłożonego ciśnienia zewnętrznego.

## Zastosowanie Metody Elementów Skończonych do optymalizacji parametrów formowania cienkowarstwowych wysokotemperaturowych taśm nadprzewodzących

Katarzyna Szota, Instytut Matematyki

[kszota@wp.pl](mailto:kszota@wp.pl)

W pracy przedstawiono model numeryczny określający wpływ warunków formowania na stan naprężeń i odkształceń występujących w cienkowarstwowych nadprzewodnikach wysokotemperaturowych. W artykule zostały zaprezentowane wyniki obliczeń, które opierały się na metodzie elementów skończonych. Opracowany model jest bardzo istotny w aspekcie użytkowym, ponieważ może z powodzeniem stać się narzędziem obliczeniowym wspierającym decyzję inżynierską, a odpowiedni dobór parametrów formowania wysokotemperaturowych ceramicznych taśm nadprzewodzących umożliwia ograniczenie degradacji ich parametrów prądowych.

## Three-Dimensional Numerical Model of Solidification with Motion of the Liquid Phase

Ewa Węgrzyn-Skrzypczak, Instytut Matematyki

[ewa.skrzypczak@im.pcz.pl](mailto:ewa.skrzypczak@im.pcz.pl)

The paper presents numerical modeling of solidification process with convective motion of the liquid phase, generated both in the liquid and mushy zones. The transition region between the areas filled with liquid and solid is treated as a porous medium, which incorporates the suppression of fluid motion caused by the solid phase growth. Mathematical and numerical models of the phenomenon for three-dimensional domain are presented. To solve the problem Finite Element Method is used. The results obtained from numerical simulation are presented and discussed.

Keywords: Solidification; Binary alloy; Natural convection; Numerical modeling; Finite Element Analysis.

## Macierze Greena w zagadnieniach drgań belek Timoshenki

Izabela Zamorska, Instytut Matematyki

[izabela.zamorska@im.pcz.pl](mailto:izabela.zamorska@im.pcz.pl)

W pracy omówiono zagadnienie drgań belki Timoshenki o zmiennych parametrach charakteryzujących jej własności geometryczne i mechaniczne. W teorii Timoshenki ruch belki opisuje układ dwóch równań różniczkowych cząstkowych:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[ kG(x) A(x) \left( \frac{dY}{dx} - \psi \right) \right] + \rho A(x) \omega^2 Y = \mathbf{M}_1 [Y, \psi] \\ \frac{d}{dx} \left[ E(x) I(x) \frac{d\psi}{dx} \right] + kG(x) A(x) \left( \frac{dY}{dx} - \psi \right) + \rho \omega^2 I(x) \psi = \mathbf{M}_2 [Y, \psi] \end{cases}$$

Układ ten można sprowadzić do układu dwóch równań różniczkowych zwyczajnych czwartego rzędu o zmiennych współczynnikach, jednak jego rozwiązanie analityczne w ogólnym przypadku jest niemożliwe. Do wyznaczenia częstości drgań własnych belki można zastosować metodę funkcji (macierzy) Greena. Aby wyznaczyć macierz Greena należy rozwiązać jednorodne równania różniczkowe czwartego rzędu o zmiennych współczynnikach, w tym celu wykorzystano metodę szeregów potęgowych. Macierze Greena wyznaczono dla wybranych postaci zmiennych parametrów równań.